



SỞ GD & ĐT THANH HÓA

Trường PTTH Chuyên LAM SƠN

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

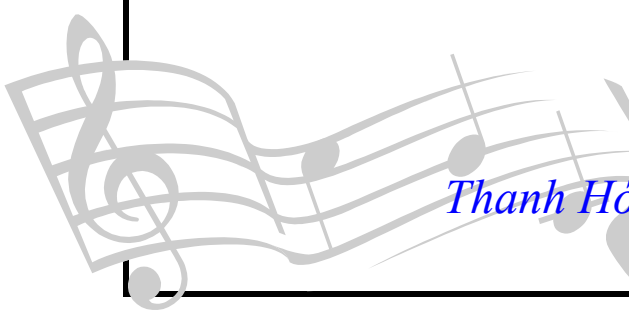
Năm học 2013 – 2014

----- * -----

**MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC
TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ**

Tác giả: Ngô Xuân Ái

Giáo viên Trường PTTH Chuyên Lam Sơn



Thanh Hóa, tháng 5 năm 2014



ĐỀ TÀI SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

I. SƠ YẾU LÝ LỊCH

Họ và tên: Ngô Xuân Ái

Ngày tháng năm sinh: 19.6.1962

Năm vào ngành: 1983

Chức vụ và đơn vị công tác: Giáo viên trường THPT Chuyên Lam Sơn

Trình độ chuyên môn: Thạc sỹ Toán học

Hệ đào tạo: Viện Toán học Việt Nam hệ chính quy.

Bộ môn giảng dạy: Môn Toán

Ngoại ngữ: Tiếng Anh

Trình độ chính trị: Sơ cấp

Khen thưởng: Bằng khen của Bộ trưởng Bộ GD & ĐT, Bằng khen của Chủ tịch UBND Tỉnh Thanh Hóa, Chiến sỹ thi đua cấp ngành và Sáng kiến kinh nghiệm môn Toán xếp loại B của Sở GD & ĐT Thanh Hóa.

II. NỘI DUNG CỦA ĐỀ TÀI

Tên đề tài: MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

Lý do chọn đề tài: Trong cấu trúc đề thi Đại học môn Toán dạng này chiếm một phần không nhỏ, gồm 2 câu chọn một về hình học phẳng tọa độ ở mức khó (mức điểm 8/10); 2 câu dạng tương tự của hình học không gian tọa độ và một câu khó nhất (mức điểm 10) có cùng dạng về bất đẳng thức, cực trị.

Yêu cầu để thực hiện được đề tài: Kiến thức tổng hợp và sắc sảo về nhiều phân môn, như: hình học phẳng ở các lớp THCS, vectơ và tọa độ, biến đổi đại số bất đẳng thức, giải tích phương trình và hàm số. Khó với phần đông học sinh, thậm chí cả với một bộ phận giáo viên chưa có nhiều kinh nghiệm.

Phạm vi thời gian thực hiện đề tài: Thực hiện trong nhiều năm học từ 2006 đến nay, tại trường THPT Chuyên Lam Sơn.

III. QUÁ TRÌNH THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Cơ sở lý thuyết: Với mỗi vị trí xác định của một đối tượng hình học hoặc vị trí tương đối của các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường tròn đều chứa trong nó những đại lượng về giá trị góc, khoảng cách, diện tích v, v ... Và trong mỗi tập giá trị như thế - có thể tồn tại hoặc không các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của nó. Đề tài nhằm xem xét một số bài toán đó.

Tình trạng thực tế khi chưa thực hiện: Học sinh có rất ít kinh nghiệm trong việc tìm tòi phương pháp giải dạng này. Không có khả năng tổng hợp thống kê, phân dạng bài toán. Kiến thức hình học ở THCS hoặc chưa đủ hoặc quên. Còn thiếu kiến thức và niềm tin vào dạng đại số của bài toán về bất đẳng thức.

Thành quả khi đã thực hiện: Khắc phục được cho học sinh những hạn chế nêu trên. Tăng thêm niềm tin và say mê sáng tạo, tìm tòi các lời giải hay. Thiết kế các đề toán đẹp. Đạt điểm cao trong các kỳ thi Đại học (Hầu hết là điểm 9, điểm 10).

Những biện pháp thực hiện: (nội dung chính của đề tài)

MỞ ĐẦU

Tài liệu này được chia thành hai phần nội dung

Phần 1: Tóm tắt lý thuyết về vectơ và tọa độ trong mặt phẳng.

Phần 2: Các bài toán áp dụng.

Các bài toán về cực trị hình học giải theo phương pháp tọa độ. Bao gồm những bài toán suy từ các tính chất cơ bản kinh điển của hình phẳng. Mức độ khó dễ nói chung là tương đương các đề thi Đại học hàng năm.

Trong tài liệu, các đề bài thường là tham khảo từ các đề thi thử Đại học ở các trường PTTH trên cả nước. Tác giả sắp xếp lại theo dạng và đưa ra các cách giải cùng những phân tích bình luận.

Tài liệu đã được tác giả sử dụng thường xuyên hàng năm ở nhiều lớp học, khóa học và đạt hiệu quả cao.

Chân thành cảm ơn và mong nhận được sự góp ý và bổ sung của mọi người.

Địa chỉ liên hệ được in ở mỗi cuối trang.

Thanh Hóa, tháng 5 năm 2014.

Người viết: Ngô Xuân Ái.

Giáo viên trường THPT Chuyên Lam Sơn.

Phần 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

(về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng)

1. Phép toán vectơ và tọa độ trong mặt phẳng

- Độ dài: $A = (x_1; y_1)$ và $B = (x_2; y_2)$, thì $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Góc: $\vec{u} = (a; b)$ và $\vec{v} = (x; y)$, ta có: $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{ax + by}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.
- Khoảng cách: $\Delta: ax + by + c = 0$ và $\Delta': ax + by + c' = 0$; $M(x_0; y_0)$.

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ và } d(\Delta, \Delta') = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$.
- $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Bất đẳng thức: $\vec{u} = (a; b)$ và $\vec{v} = (x; y)$.

$$\text{Suy ra: } |\vec{u} \pm \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ và } |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

2. Đường thẳng, đường tròn và conic

- Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.
- Đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tâm $I(a; b)$ bán kính R .
- Elip: $(E) = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

$$c^2 = a^2 - b^2 \ (c > 0).$$

Tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$. Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$. Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$).

Bán kính qua tiêu: $F_1M = a + \frac{c}{a}x$ và $F_2M = a - \frac{c}{a}x$ ($\forall M(x; y) \in (E)$).

- Hyperbol: $(H) = \{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a\}$; $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$$c^2 = a^2 + b^2, c > 0 \ (e > 1). \text{ Tiệm cận } d_{1,2}: y = \pm \frac{b}{a}x.$$

- Parabol: $(P) = \{M \mid MF = d(M, \Delta)\}$.
- Phương trình chính tắc: $(P): y^2 = 2px$, p là tham số tiêu ($p > 0$).

$$\text{Tiêu điểm: } F\left(\frac{p}{2}; 0\right). \text{ Đường chuẩn } \Delta: x = -\frac{p}{2}.$$

Phần 2. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Mỗi bài toán sau đây đều được cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy , do đó ta quy ước mỗi đề bài đều bắt đầu bằng câu: "Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ...".

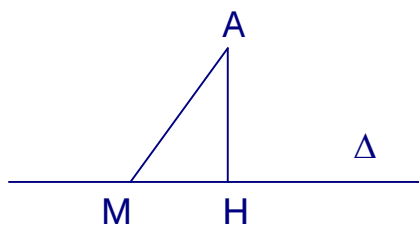
Mỗi bài toán được trình bày theo thứ tự: Đề bài. Lời giải hoặc Hướng dẫn hoặc Kết quả. Lời bình và Bài toán tương tự (nếu có).

Bài 1: Cho điểm $A(2; -3)$ và đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$.

- 1) Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho MA ngắn nhất.
- 2) Viết phương trình Δ' qua A , sao cho $d(O, \Delta')$ lớn nhất.
- 3) Viết phương trình d qua A , sao cho $d(d, \Delta)$ lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:*

- 1) *Cách 1: (Phương pháp hình học)* Gọi H là hình chiếu của A trên Δ , ta có $MA \geq AH$, suy ra M cần tìm trùng với H .



Khi đó, AM đi qua A và vuông góc với Δ .

Tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

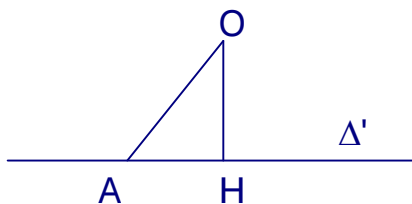
Suy ra: $M = \left(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

Cách 2: (Phương pháp đại số) M thuộc Δ , suy ra: $M(2t + 5; t)$.

$$AM^2 = (2t + 3)^2 + (t + 3)^2 = 5t^2 + 18t + 18.$$

Suy ra MA ngắn nhất, khi và chỉ khi $t = -\frac{9}{5}$. Suy ra: $M = \left(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

- 2) Gọi H là hình chiếu của O trên Δ' , ta có: $d(O, \Delta') = OH \leq OA$.



Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi $H \equiv A$.

Δ' nhận $\overrightarrow{OA} = (2; -3)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Phương trình Δ' : $2x - 3y - 13 = 0$.

- 3) d đi qua A không thuộc Δ , nên d và Δ cắt nhau hoặc song song.

Trường hợp d và Δ cắt nhau thì $d(d, \Delta) = 0$. Do đó ta chỉ xét $d // \Delta$.

Phương trình d : $x - 2y - 8 = 0$.

Bài 2: Cho điểm $M(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc tia Ox và B thuộc tia Oy sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích S

- nhỏ nhất.
- lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $A(a; 0)$, $a \geq 0$ và $B(0; b)$, $b \geq 0$.

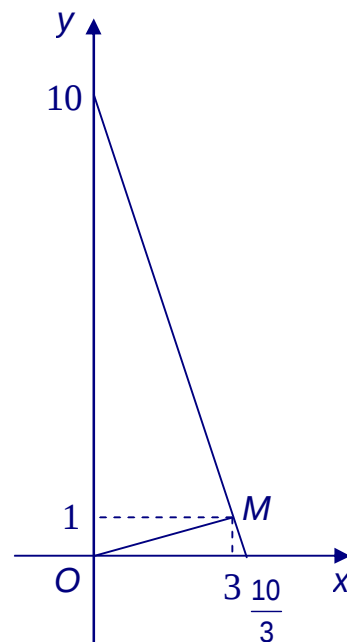
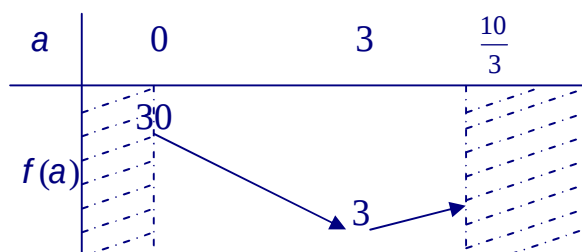
Suy ra: $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow 3(a - 3) + (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a.$$

$$b \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{10}{3} \quad (*).$$

$$2S = MA \cdot MB = 3(a^2 - 6a + 10).$$

Khảo sát hàm $f(a) = 3(a^2 - 6a + 10)$, trên đoạn $\left[0; \frac{10}{3}\right]$.



Từ đây suy ra: • $\max S = 15$, khi $a = 0$. Khi đó $b = 10$, suy ra: $A(0; 0)$ và $B(0; 10)$.
• $\min S = \frac{3}{2}$, khi $a = 3$. Khi đó $b = 1$, suy ra: $A(3; 0)$ và $B(0; 1)$.

♣ *Bài toán tương tự:* Thay số liệu bất kỳ $M(a; b)$, với a và b dương.

Bài 3: cho hai điểm $A(3; 4)$ và $B(-1; 2)$, đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho:

- $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.
- $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $M \in \Delta$, nên $M(2t + 2; t)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = (2t - 1; t - 4)$ và $\overrightarrow{BM} = (2t + 3; t - 2)$.

$$AM^2 = 5t^2 - 12t + 17, 2BM^2 = 10t^2 + 16t + 26.$$

$$a) MA^2 + 2MB^2 = 15t^2 + 4t + 43.$$

$$MA^2 + 2MB^2 \text{ đạt min, khi và chỉ khi: } t = -\frac{2}{15}. \text{ Vậy, } M\left(\frac{26}{15}; -\frac{2}{15}\right).$$

b) $MA^2 - 2MB^2 = -5t^2 - 28t - 9$.

$MA^2 - 2MB^2$ đạt max, khi và chỉ khi: $t = -\frac{14}{5}$. Vậy, $M\left(-\frac{18}{5}; -\frac{14}{5}\right)$.

♣ *Bài toán tổng quát:* "Cho n điểm A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) và n số thực a_i . Tìm tọa độ điểm M trên Δ để $S = \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất)".

Bài 4: cho $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, các điểm $A(3; 4)$, $B(-1; 2)$ và $C(0; 1)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho $P = |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $M \in \Delta$, nên $M(2t + 2; t)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = (2t - 1; t - 4)$, $\overrightarrow{BM} = (2t + 3; t - 2)$ và $\overrightarrow{CM} = (2t + 2; t - 1)$.

$\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM} = (4t - 1; 2t - 3)$, suy ra: $P^2 = 20t^2 - 20t + 10$.

$P \min \Leftrightarrow P^2 \min \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$. Khi đó: $M\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

♣ *Cách giải khác:* Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (*).

Biểu thức (*) xác định tọa độ điểm G và $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

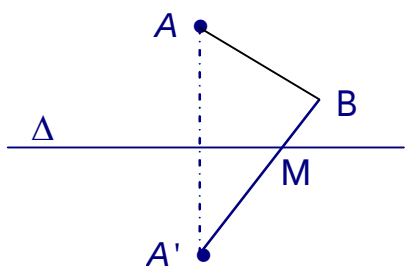
$P \min \Leftrightarrow MG \min$. Giải tương tự Bài 1.1 (M là hình chiếu của G trên Δ).

♣ *Bài toán tổng quát:* "Cho n điểm A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) và n số thực a_i , thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. Tìm tọa độ điểm M trên Δ để $P = \left| \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất".

♣ *Bài toán tương tự trong không gian với hệ tọa độ Oxyz*, trong đó đường thẳng Δ được thay bởi mặt phẳng (P).

Bài 5: cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 1 = 0$, hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 0)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho

- 1) $MA + MB$ nhỏ nhất.
- 2) $|MA - MB|$ lớn nhất.



♣ *Lời giải:* Đặt $f(x; y) = x - 2y + 1$.

Ta có $f(2; 1) \cdot f(1; 0) > 0$, suy ra A và B nằm cùng phía nửa mặt phẳng bờ là Δ .

Gọi A' đối xứng với A qua Δ , tọa độ $A'(x; y)$.

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ \frac{x+2}{2} - 2 \cdot \frac{y+1}{2} + 1 = 0. \end{cases} \text{ Suy ra: } A' \left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right).$$

1) $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng Δ và đoạn thẳng $A'B$ (do A' và B nằm hai phía của Δ nên tồn tại duy nhất điểm M như thế).

Tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0. \end{cases}$ Suy ra: $M \left(\frac{7}{5}; \frac{6}{5} \right)$.

2) $|MA - MB| \leq AB$.

Đẳng thức xảy ra, khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB .

Do đó M là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng AB (do A, B nằm cùng phía của Δ nên tồn tại duy nhất điểm M như thế).

Tọa độ $M(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$ Suy ra: $M(3; 2)$.

♣ *Bình:* Trong ý 1, do A và B nằm cùng phía, nên A' và B nằm khác phía đường thẳng Δ . Vì thế tồn tại điểm M là giao của đường thẳng Δ và đoạn $A'B$.

Trong ý 2, dễ sai lầm khi kết luận M là giao của đường thẳng Δ và đoạn $A'B$.

Bài 6: cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$, đường thẳng $\Delta: x - 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho

1) $MA + MB$ nhỏ nhất.

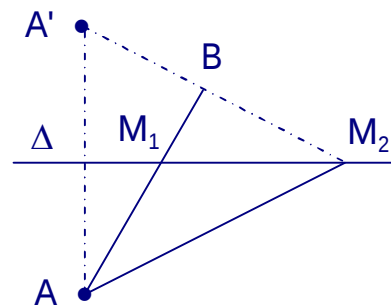
2) $|MA - MB|$ lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn và kết quả:*

A và B nằm khác phía nửa mặt phẳng bờ là Δ .

1) Ta có: $MA + MB \geq AB$.

M là giao của đoạn thẳng AB với Δ . Tọa độ $M \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right)$.



2) Gọi A' đối xứng với A qua Δ , ta có: $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$.

Xảy ra đẳng thức, khi M là giao của đường thẳng $A'B$ với Δ .

Tọa độ $A' \left(\frac{8}{5}; \frac{9}{5} \right)$ và $M \left(\frac{11}{5}; \frac{8}{5} \right)$.

♣ Hai bài toán mẫu:

Cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B . Tìm tọa độ điểm M trên Δ sao cho

- 1) $MA + MB$ nhỏ nhất, nếu A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng Δ .
- 2) $|MA - MB|$ lớn nhất, nếu A và B nằm khác phía đối với đường thẳng Δ .

Bài 7: cho $A(2; 1)$, $\Delta_1: 2x - y + 2 = 0$, $\Delta_2: x + 3y + 5 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B và C tương ứng nằm trên Δ_1 và Δ_2 sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

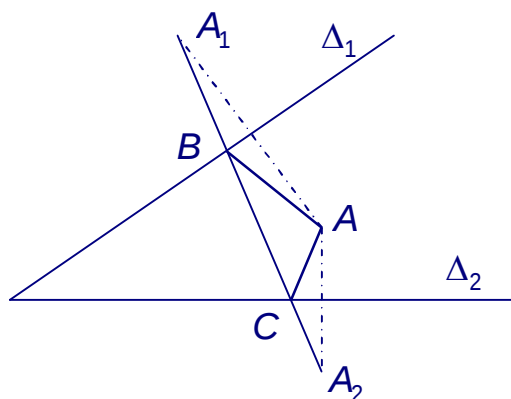
♣ Hướng dẫn:

$$A_1(x; y): \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2.(x + 2) - (y + 1) + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1(-2; 3). \text{ Tương tự: } A_2(0; -5).$$

$$B(x; y): \begin{cases} 4x + y + 5 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{7}{6}; -\frac{1}{3}\right). \text{ Tương tự: } C\left(-\frac{10}{11}; -\frac{15}{11}\right).$$

$$\text{Thử lại: } \overrightarrow{A_1A_2} = (2; -8), \overrightarrow{A_1B} = \left(\frac{5}{6}; -\frac{20}{6}\right), \overrightarrow{A_1C} = \left(\frac{12}{11}; -\frac{48}{11}\right).$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{12}{5} \overrightarrow{A_1B} = \frac{22}{12} \overrightarrow{A_1C}, \text{ suy ra: } A_1, B, C \text{ và } A_2 \text{ thẳng hàng, theo thứ tự ấy.}$$



$$\text{Vậy: } B\left(-\frac{7}{6}; -\frac{1}{3}\right) \text{ và } C\left(-\frac{10}{11}; -\frac{15}{11}\right).$$

♣ Bình:

Sai lầm khi chỉ lấy điều kiện chu vi tam giác ABC đạt min là A_1, B, C và A_2 thẳng hàng mà không kể thứ tự của các điểm.

Trên cơ sở là: độ dài đường gấp khúc A_1BCA_2 ngắn nhất khi và chỉ khi A_1 , B , C và A_2 thẳng hàng, theo thứ tự ấy.

Bạn đọc tham khảo ví dụ, với: $A(2; -3)$, $\Delta_1: x - 2y + 3 = 0$, $\Delta_2: 3x + y + 2 = 0$.

Kết quả: $A_1\left(-\frac{12}{5}; \frac{29}{5}\right)$, $A_2(-1; -4)$, $B\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ và $C\left(-\frac{9}{4}; \frac{19}{4}\right)$.

Bài 8: cho điểm $A(2; 1)$, đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), sao cho:

c) độ dài MA

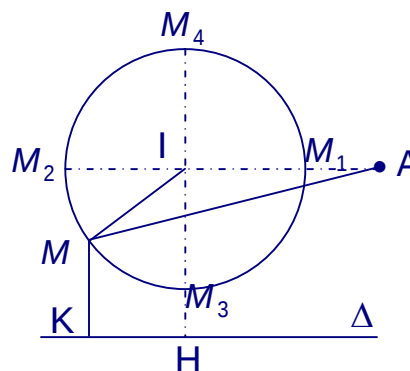
a) nhỏ nhất.

b) lớn nhất.

d) khoảng cách $d(M, \Delta)$

a) nhỏ nhất.

b) lớn nhất.



♣ *Hướng dẫn:* (C) có tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

1) $A(2; 1)$; $AI = 4 > R$, A nằm ngoài (C). Xét với M là điểm bất kỳ (C), ta có

♣ *Cách 1 (Phương pháp hình học)* Gọi M_1M_2 là đường kính đi qua A , M_1 nằm giữa A và M_2 , ta có: $AM \geq AI - IM = AM_1$ và $AM \leq AI + IM = AM_2$.

Suy ra: AM min $\Leftrightarrow M \equiv M_1$, AM max $\Leftrightarrow M \equiv M_2$.

Khi đó, tọa độ $M(x; y)$: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (-2 - \sqrt{5}; 1) \\ (x; y) = (-2 + \sqrt{5}; 1). \end{cases}$

Tính độ dài AM , suy ra: $M_1 = (-2 + \sqrt{5}; 1)$ và $M_2 = (-2 - \sqrt{5}; 1)$.

♣ *Cách 2 (Phương pháp đại số)* $M(x; y)$ thỏa mãn $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

$AM^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 8x = 5 - 8x$.

$(y - 1)^2 = 5 - (x + 2)^2 \geq 0$, suy ra: $x^2 + 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{5} \leq x \leq -2 + \sqrt{5}$.

Suy ra: $M_1 = (-2 + \sqrt{5}; 1)$ và $M_2 = (-2 - \sqrt{5}; 1)$.

2) $d(I; \Delta) = 5\sqrt{2} > R$, suy ra Δ không cắt (C).

Gọi M_3M_4 là đường kính vuông góc với Δ tại H , M_3 nằm giữa H và M_4 .
Gọi K là hình chiếu của M trên (C), ta có: $M_3H \leq MK \leq M_4H$.

Suy ra: $d(M, \Delta) \min \Leftrightarrow M \equiv M_3$, $d(M, \Delta) \max \Leftrightarrow M \equiv M_4$.

$$\text{Khi đó tọa độ } M(x; y) \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (2x+4)^2 = 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (-3; -1) \\ (x; y) = (-1; 3) \end{cases}$$

Tính $d(M, \Delta)$, suy ra: $M_3 = (-3; -1)$ và $M_4 = (-1; 3)$.

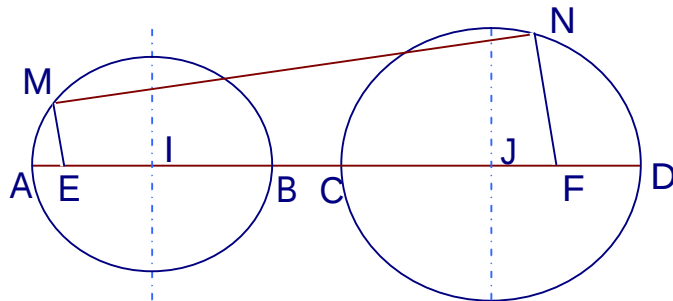
♣ *Lưu ý rằng:*

Nếu Δ và (C) cắt nhau thì $\min d(M, \Delta) = 0$ (xảy ra tại các giao điểm).

Bài 9: cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + y^2 = 1$, $(C_2): (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Tìm tọa độ điểm M trên (C_1) và điểm N trên (C_2) sao cho độ dài MN

- lớn nhất.
- nhỏ nhất.



♣ *Hướng dẫn*

$(C_1): I(1; 0), r = 1;$

$(C_2): J(1; 4), R = 2.$

$IJ = 4 > R + r.$

(C_1) và (C_2) nằm ngoài nhau.

Giả sử IJ cắt (C_1) và (C_2) theo thứ tự là A, B, C, D .

Kẻ các đường vuông góc với MN tại M và N , cắt đường thẳng IJ tại E và F tương ứng. Ta có E và F tương ứng thuộc các đoạn thẳng AB và CD .

Suy ra: $MN \leq EF \leq AD$.

Tương tự, nếu hạ MH và NK vuông góc với CD , ta có: $BC \leq HK \leq MN$. Do đó ta được $BC \leq MN \leq AD$.

Phương trình đường thẳng $IJ: x - 1 = 0$.

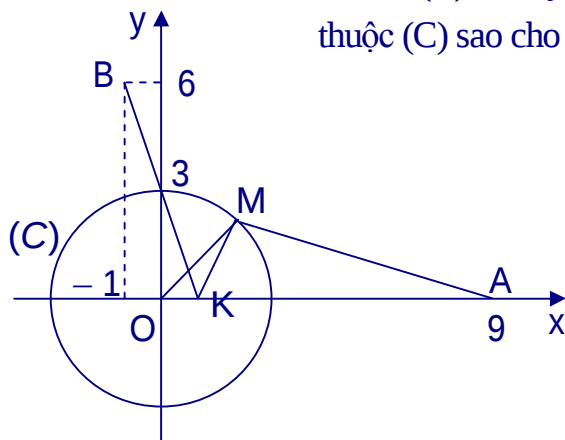
Tọa độ A, B thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (1; 1) \\ (x; y) = (1; -1) \end{cases}.$

Tọa độ C, D thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (1; 2) \\ (x; y) = (1; 6) \end{cases}.$

Kết quả: a) $M(1; -1)$ và $N(1; 6)$ (thì MN lớn nhất).

b) $M(1; 1)$ và $N(1; 2)$ (thì MN nhỏ nhất).

Bài 10: cho đường tròn (C) tâm I , bán kính R . Hai điểm A và B (nằm ngoài (C)) thỏa mãn $IA = k.R$, điều kiện này cho ẩn). Tìm tọa độ điểm M nằm trên (C) , sao cho biểu thức $P = MA + kMB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Ví dụ: $(C): x^2 + y^2 = 9$ và $A(0; 9)$, $B(-1; 6)$. Tìm tọa độ M thuộc (C) sao cho biểu thức $P = MA + 3MB$ đạt min.

♣ *Hướng dẫn và kết quả*

$(C): O(0; 0), R = 3; OA = 9 = 3R$.

Gọi $K(1; 0)$, ta có $OM = 3OK$

$\triangle AOM \sim \triangle MOC$ và $AO = 3MO$

$\Rightarrow MA = 3MK$.

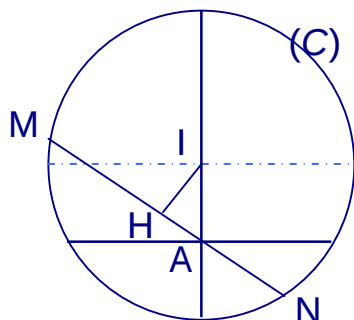
Suy ra: $P = 3(MK + MB) \geq 3BK$.

Dấu bằng xảy ra, khi M thuộc đoạn thẳng BC . Đáp số: $M(0; 3)$.

Bài 11: cho điểm $A(3; 1)$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt (C) tại M và N , sao cho độ dài MN

1) lớn nhất.

2) nhỏ nhất.



♣ *Hướng dẫn:* $(C): I(2; -3), R = 5$.

$IA = \sqrt{17} < R$ hay A nằm trong (C) .

1) $MN \leq 2R$. Dấu bằng xảy ra, khi Δ đi qua I .

Phương trình $\Delta: 4x - y - 11 = 0$.

♣ *Bình:*

Lúc này MN là đường kính của (C) , hay đường thẳng Δ đi qua A và I . Kết quả luôn đúng cho mọi trường hợp của A (nằm trong, ngoài hay trên đường tròn).

2) Gọi H là trung điểm MN , suy ra $IH \perp MN$.

Khi đó: $MN = 2MH$ và $IH \leq IA$

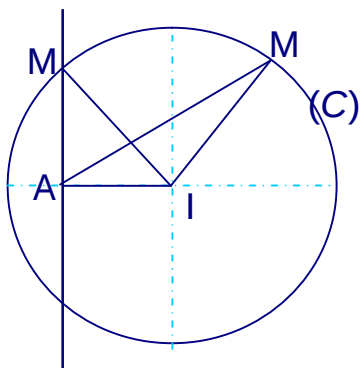
Suy ra: $MN = 2MH = 2\sqrt{IM^2 - IH^2} \geq 2\sqrt{R^2 - IA^2} = 4\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra, khi chỉ khi $H \equiv A$ hay $\Delta \perp IA$.

Δ đi qua $A(3; 1)$, nhận $\overrightarrow{IA} = (1; 4)$ làm vector pháp tuyến: $x + 4y - 7 = 0$.

♣ *Bình:* Kết quả chỉ đúng cho trường hợp A nằm trong đường tròn. Trong trường hợp này, ta luôn có: $4\sqrt{2} \leq MN \leq 10$.

Bài 12: cho điểm $A(1; -3)$ và đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 50$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{AMI}$ lớn nhất, I là tâm của (C) .



♣ *Lời giải:*

(C) : tâm $I(2; -6)$, bán kính $IM = 5\sqrt{2}$.

$A(1; -3)$, suy ra $AI^2 = 10$.

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AMI} &= \frac{AM^2 + MI^2 - AI^2}{2 \cdot AM \cdot MI} \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \left(AM + \frac{40}{AM} \right) \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

$\cos \widehat{AMI}$ đạt min hay $\widehat{AMI}$ đạt max, khi: $AM = \frac{40}{AM} \Leftrightarrow AM^2 = 40$.

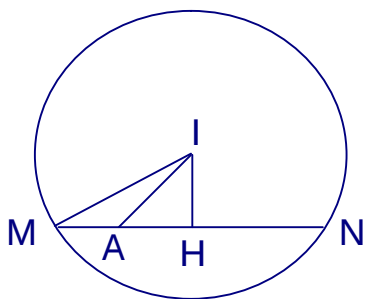
Khi đó: $AM^2 + AI^2 = 50 = MI^2$, hay AMI là tam giác vuông tại A .

$$M(x; y) \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x - 3y - 10 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 10 \\ y^2 + 6y + 5 = 0. \end{cases}$$

Suy ra: $M(7; -1)$ và $M(-5; -5)$.

♣ Cách khác (phương pháp hình học)

Gọi N là giao điểm của AM với (C) , H là trung điểm MN , ta có: $IH \perp MN$.



$$\text{Suy ra: } \sin \widehat{AMI} = \frac{IH}{IM} \leq \frac{IA}{IM} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra, khi $H \equiv A$.

Khi đó $MN \perp IA$.

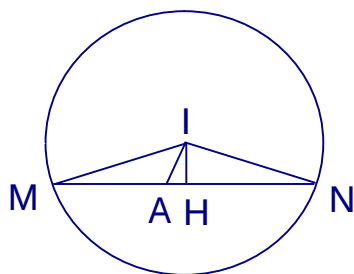
AM nhận $\overrightarrow{AI} = (1; -3)$ làm vectơ pháp tuyến.

$$M(x; y) \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x - 3y - 10 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 50. \end{cases}$$

Suy ra: $M(7; -1)$ và $M(-5; -5)$.

Bài 13: cho $A(3; 1)$ và $(C): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$, tâm I . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt (C) tại M và N , sao cho IMN có diện tích S lớn nhất.

Câu hỏi tương tự, với $A(3; -2)$.



♣ Hướng dẫn:

(C) : tâm $I(2; -3)$, bán kính $R = 5$.

$IA = \sqrt{17} < R$ hay A nằm trong (C) .

$$\clubsuit \text{ Cách 1: } S = \frac{IA^2 \cdot \sin \widehat{AIB}}{2} = \frac{25}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{25}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra, khi: $\widehat{MIN} = 90^\circ$.

Gọi H là trung điểm MN , ta có $IH \perp MN$, suy ra $d(I, \Delta) = IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

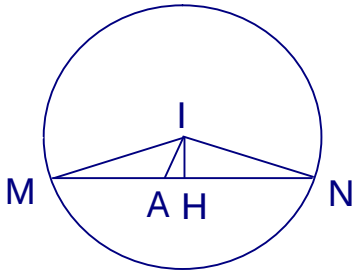
Δ đi qua $M(3; 1)$, phương trình dạng: $a(x - 3) + b(y - 1) = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ (*).

$$\text{Thỏa mãn: } \frac{|a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(a + 4b)^2 = 25(a^2 + b^2).$$

Từ điều kiện (*), suy ra $b \neq 0$. Chọn $b = -1$, ta được:

$$2(a - 4)^2 = 25(a^2 + 1) \Leftrightarrow 23a^2 + 16a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{7}{23}.$$

Phương trình Δ : $x + y - 4 = 0$ hoặc Δ : $y = \frac{7}{23}(x - 3) + 1$.



♣ Cách 2:

$$S = IH \cdot \sqrt{25 - IH^2} \leq \frac{IH^2 + 25 - IH^2}{2} = \frac{25}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra, khi chỉ khi: $IH = \sqrt{25 - IH^2}$

$$\Leftrightarrow IH = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ hay } d(I, \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

... đến đây, tương tự cách 1.

♣ Cách 3: Đặt $IH = x$, $0 < x \leq \sqrt{17}$. Suy ra: $S = x\sqrt{25 - x^2}$.

Xét hàm $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$, $0 < x \leq \sqrt{17}$.

Ta có: $f'(x) = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

x	0	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{17}$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			

Từ đó: S đạt max khi và chỉ khi:

$$d(I, \Delta) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

... đến đây, tương tự cách 1.

♣ Kết quả: Phương trình $\Delta: x + y - 4 = 0$ hoặc $\Delta: y = \frac{7}{23}(x - 3) + 1$.

♣ Câu hỏi tương tự với $A(3; -2)$. Tương tự cách 3, ta có: $0 < IH \leq IA = \sqrt{2}$ hay $0 < x \leq \sqrt{2}$.

Diện tích $S = x\sqrt{25 - x^2}$. Xét $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$, với $0 < x \leq \sqrt{2}$.

$$f'(x) = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}} > 0, \text{ suy ra } f(x) \text{ đồng biến.}$$

S đạt max tại $x = \sqrt{2}$. Khi $H \equiv A$, hay $\Delta \perp IA$. Phương trình $\Delta: x - y - 5 = 0$.

♣ Bình:

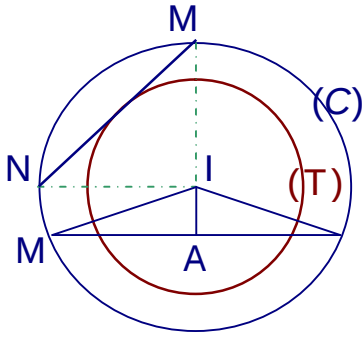
1) Trong trường hợp $A(3; -2)$ không giải được bằng cách 1 và cách 2 do không xảy ra $IH = \frac{5}{\sqrt{2}}$, với $0 < IH \leq \sqrt{2}$. Cách 3 là cách giải tổng quát.

2) Nếu giải theo cách 1 và cách 2, sai lầm khi kết luận vô nghiệm.

3) Biện luận hình học về vị trí điểm A đối với (C) hay độ dài IA so với R.

Xét đường tròn (T): $\left(I, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ - đồng tâm và nằm trong (C): (I, R) .

• $S = \frac{R^2}{2} \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}}$, hay AB là tiếp tuyến của (T).



Nếu $IA > \frac{R}{\sqrt{2}}$ hay M nằm ngoài (T) thì có hai đường thẳng Δ là tiếp tuyến với (T) kẻ qua A.

$IA \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow M \in (T)$ hoặc M nằm trong (T), có đúng một đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $IA \perp \Delta$ hay đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc tơ pháp tuyến.

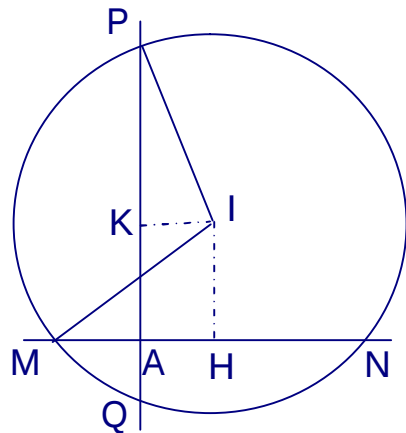
Bài 14: cho điểm $A(2; -1)$, đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$; hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau tại A; Δ_1 cắt (C) tại M và N, Δ_2 cắt (C) tại P và Q. Viết phương trình Δ_1 và Δ_2 , sao cho diện tích S của tứ giác MPNQ đạt

- 1) nhỏ nhất.
- 2) lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $I(1; -2)$, $R = 3$; $\overrightarrow{IA} = (1; 1)$, A nằm trong (C).

H và K tương ứng là trung điểm của MN và PQ, ta có: $IH \perp MN$ và $IK \perp PQ$.

Do đó IHAK là hình chữ nhật, suy ra: $IH^2 + IK^2 = IA^2 = 2$, không đổi.



$$\begin{aligned} S &= \frac{MN \cdot PQ}{2} = 2MH \cdot PK \\ &= 2\sqrt{(R^2 - IH^2)(R^2 - IK^2)} \\ &= 2\sqrt{63 + IH^2 \cdot IK^2}. \end{aligned}$$

- 1) Suy ra: $S \geq 2\sqrt{63}$. Đẳng thức xảy ra khi: $IH \cdot IK = 0$, tức Δ_1 hoặc Δ_2 đi qua tâm I.

Do đó S nhỏ nhất, khi một trong hai đường thẳng Δ_1 hoặc Δ_2 trùng với đường thẳng AI, đường thẳng còn lại trong chúng vuông góc với AI (tại A).

Ta được $\Delta_1: x - y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x + y + 1 = 0$.

2) Do $IH^2 \cdot IK^2 \leq \frac{(IH^2 + IK^2)^2}{4} = 1$, suy ra: $S \leq 16$.

Dấu bằng xảy ra khi: $IH = IK$. Khi đó $d(I, \Delta) = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1$.

Δ đi qua M , có phương trình dạng: $a(x-2) + b(y+1) = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ (*).

Thỏa mãn: $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

Vậy, chọn: $\Delta_1: x-2=0$ và $\Delta_2: y+1=0$ (hoặc ngược lại).

♣ *Bình:*

$d(I, \Delta) = 1$, chứng tỏ Δ là tiếp tuyến của đường tròn $C(I, 1)$.

$d(I, \Delta) = \frac{IA}{\sqrt{2}}$, chứng tỏ Δ cắt đường tròn $C(I, IA)$ tại hai điểm B và C sao cho tam giác IBC vuông cân tại I , hay diện tích IBC lớn nhất.

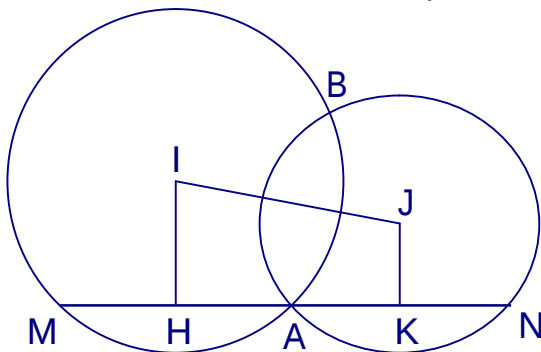
Bài 15: cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$ và $(C_2): (x+1)^2 + y^2 = 5$. Gọi A và B là giao điểm của (C_1) và (C_2) , A có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt (C_1) và (C_2) tương ứng tại M và N , sao cho A nằm giữa M và N và

1) MN lớn nhất

2) Diện tích S của tam giác BMN lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $(C_1): I(2; 3), R = \sqrt{17}$; $(C_2): J(-1; 0), r = \sqrt{5}$.

Tọa độ $A(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 5, x > 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1)$.

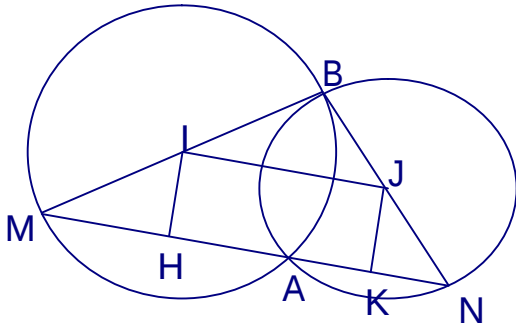


1) Gọi H và K tương ứng là trung điểm của AM và AN , suy ra:

$IH \perp AM$ và $JK \perp AN$ hay $IH \parallel JK$.

$IHKJ$ là hình thang vuông tại H và K , do đó: $MN = 2HK \leq 2IJ$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $HK \parallel IJ$ hay Δ nhận $\vec{IJ} = (-3; -3)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1; -1)$, có phương trình: $x - y - 2 = 0$.



2) Do $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ là các góc nội tiếp chắn cung $\widehat{AB}$ cố định của (C_1) và (C_2) tương ứng, nên các góc $\widehat{BMN}$ và $\widehat{BNM}$ không đổi, suy ra $\widehat{MBN} = \alpha$ không đổi.

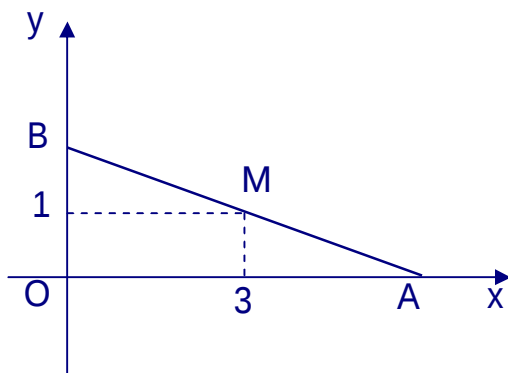
$$S = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin \widehat{MBN} \leq 2Rr \cdot \sin \alpha.$$

Nhận thấy, nếu $BM = 2R$ thì $BA \perp MN$, suy ra $BN = 2r$. Do đó S lớn nhất. Khi đó IJ là đường trung bình của tam giác BMN , hay $MN \parallel IJ$.

Δ đi qua $A(1; -1)$ và nhận $\overrightarrow{IJ} = (-3; -3)$ làm vectơ chỉ phương: $x - y - 2 = 0$.

Bài 16: cho điểm $M(3; 1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt tia Ox và tia Oy tương ứng tại A và B (khác O) sao cho:

- độ dài AB nhỏ nhất.
- diện tích S của tam giác AOB nhỏ nhất.
- khoảng cách $d(O, \Delta)$ lớn nhất.
- tổng $T = OA + 3OB$ nhỏ nhất.
- $P = \frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2}$ nhỏ nhất.



♣ Hướng dẫn

Do A và B (khác O) lần lượt thuộc tia Ox và tia Oy , nên tọa độ có dạng:

$A(a; 0)$ và $B(0; b)$, với $a > 0$ và $b > 0$.

$$\Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ thỏa mãn: } \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Điều kiện: $\frac{1}{b} = 1 - \frac{3}{a} > 0$, suy ra: $a > 3$ (*). Khi đó: $b = \frac{a}{a-3} = 1 + \frac{3}{a-3}$.

a) $AB^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(1 + \frac{3}{a-3}\right)^2$ (tại đây có thể xét hàm $f(a)$, $a > 3$)

$$\begin{aligned}
&= (a-3)^2 + \frac{6}{a-3} + \frac{9}{(a-3)^2} + 6(a-3) + 10 \\
&\geq 3\sqrt[3]{(a-3)^2 \cdot \frac{3}{a-3} \cdot \frac{3}{a-3}} + 3\sqrt[3]{\frac{9}{(a-3)^2} \cdot 3(a-3) \cdot 3(a-3)} + 10 \\
&= 3\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{81} + 10.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra, khi: $(a-3)^3 = 3 \Leftrightarrow a = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Khi đó: $b = 1 + \sqrt[3]{9}$, a và b thỏa mãn (*). Vậy, $\Delta: \frac{x}{3 + \sqrt[3]{3}} + \frac{y}{1 + \sqrt[3]{9}} = 1$.

♣ *Bình:* 1) Có thể mắc một số sai lầm sau:

- $AB^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Khi đó $a = b = 4$; $AB^2 = 32$.

- $AB^2 = (a-3)^2 + \frac{9}{(a-3)^2} + 6\left(\frac{1}{a-3} + a-3\right) + 10 \geq 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 10 = 28$.

2) Kết quả $\min AB^2 = 3\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{81} + 10 \approx 28,3$ hay $28 < \min AB^2 < 32$, suy ra: Không xảy ra dấu đẳng thức trong đánh giá $AB^2 \geq 28$. Và rõ ràng khi $a = b$ ta mới có $AB^2 = 32$ mà không suy được $AB^2 \geq 32$.

3) Phương pháp xét hàm $f(a) = (a-3)^2 + \frac{6}{a-3} + \frac{9}{(a-3)^2} + 6(a-3) + 10$ cũng chỉ là định hướng cách giải. Chắc chắn lời giải sẽ khá rườm rà và khó khăn trong thực hành tìm nghiệm phương trình $f'(a) = 0$ và xét dấu $f'(a)$.

4) Bài tập này có thể coi như ôn được kiến thức tổng hợp: về hình học phẳng, về tọa độ, về bất đẳng thức, về hàm số.

$$\begin{aligned}
\text{b) } 2S = ab &= a + \frac{3a}{a-3} = a + 3 + \frac{9}{a-3} \text{ (có thể xét hàm } f(a), a > 3 \text{ tại đây)} \\
&= a - 3 + \frac{9}{a-3} + 6 \geq 2\sqrt{(a-3) \cdot \frac{9}{a-3}} + 6 = 12.
\end{aligned}$$

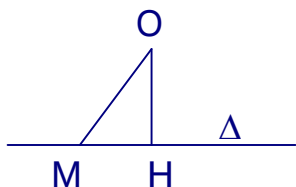
Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi: $a - 3 = \frac{9}{a-3} \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 6$.

Kết hợp (*), được: $a = 6$, suy ra $b = 2$.

Phương trình $\Delta: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ hay $x + 3y - 6 = 0$.

♣ *Bình:* Xét hàm $f(a) = a + 3 + \frac{9}{a-3}$ cũng khá đơn giản.

c) Gọi H là hình chiếu của O trên Δ



$$\Rightarrow OH \perp \Delta \Rightarrow d(O, \Delta) = OH \leq OM.$$

Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi: $H \equiv M \Leftrightarrow \Delta \perp OM$.

Δ nhận $\overrightarrow{OM} = (3; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

$$\text{Phương trình } \Delta: 3x + y - 10 = 0.$$

d) $T = a + 3b = a + 3 + \frac{9}{a-3}$ (có thể xét hàm $f(a)$, $a > 3$ tại đây)

$$= a - 3 + \frac{9}{a-3} + 6 \geq 2\sqrt{(a-3) \cdot \frac{9}{a-3}} + 6 = 12.$$

Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi: $a - 3 = \frac{9}{a-3} \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 6$.

Kết hợp với (*), ta được: $a = 6$ và $b = 2$. Phương trình $\Delta: x + 3y - 6 = 0$.

Cách 2: $1 = \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{1}{b}}$. Suy ra: $ab \geq 12$.

$$\text{Do đó: } OA + 3OB = a + 3b \geq 2\sqrt{3ab} \geq 12.$$

Dấu bằng xảy ra, khi: $\frac{3}{a} = \frac{1}{b}$, $a = 3b$ và $1 = \frac{3}{a} + \frac{1}{b}$. Suy ra: $a = 6$ và $b = 2$.

e) $S = \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{4}{b^2} = 5 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{b} + 1.$

$$S \min \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow b = 5. \text{ Khi đó } a = \frac{15}{4}, \text{ ta được } \Delta: \frac{4x}{15} + \frac{y}{5} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: Áp dụng Bunhia: } 1 &= \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{a} + 1 \cdot \frac{2}{b}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{9} + 1\right) \left(\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right). \text{ Do đó: } \frac{9}{OA^2} + \frac{4}{OB^2} = \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} \geq \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Dấu bằng, khi: $\frac{3}{a} : \frac{1}{3} = \frac{2}{b} : 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Suy ra: $a = 10$ và $b = \frac{2a}{9} = \frac{20}{9}$.

$$\text{Phương trình d: } 2x + 9y - 20 = 0.$$

Bài 17: cho điểm $M(0; 2)$, hai đường thẳng $\Delta_1: 3x + y + 2 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 4 = 0$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 . Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt Δ_1 và Δ_2 tại B và C tương ứng (B, C khác A) sao cho $T = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

♣ *Hướng dẫn:* Tọa độ $A(x; y)$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$ Suy ra $A(-1; 1)$.

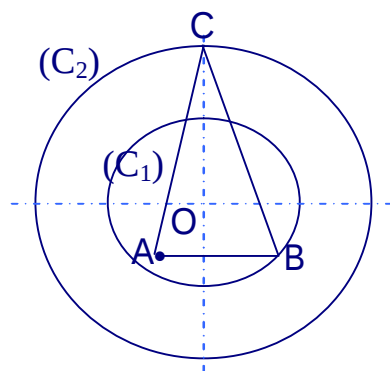
Nhận thấy $\Delta_1 \perp \Delta_2$, nên tam giác ABC vuông tại A .

Hạ $AH \perp BC$, ta có: $T = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \geq \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra, khi: $H \equiv M \Leftrightarrow AM \perp BC$. Phương trình $\Delta: x + y - 2 = 0$.

Bài 18: cho $(C_1): x^2 + y^2 = 2$ và $(C_2): x^2 + y^2 = 5$, $A(0; 1)$. Tìm tọa độ các điểm B và C nằm trên (C_1) và (C_2) tương ứng, sao cho diện tích S của tam giác ABC đạt max.

♣ *Bổ đề:* Cho hai đường tròn đồng tâm $C_1(O, R)$ và $C_2(O, R')$ ($R > R'$). Các điểm B và C lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) tương ứng. Khi đó S đạt max khi O là trực tâm tam giác ABC và O nằm trong tam giác.



Thật vậy, nếu cố định B thì đường thẳng AB cố định.

Giả sử AB cắt (C_2) tại M và N , diện tích lớn nhất khi $CO \perp AB$. Tương tự nếu cố định C . Tức O là trực tâm của ABC . Khi đó C là điểm chính giữa cung lớn MN hay O nằm trong tam giác ABC .

Áp dụng, với: $A(0; 1) \in Oy \Rightarrow BC \parallel Ox$.

Do tính đối xứng, ta giả sử B có hoành độ dương, dạng $B = (\sqrt{2-b^2}; b)$ suy

ra $C = (-\sqrt{5-b^2}; b)$, $b < 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2-b^2}; b-1)$, $\overrightarrow{CO} = (\sqrt{5-b^2}; -b)$.

Thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2-b^2)(5-b^2)} = b(b-1) \Leftrightarrow b = -1$ (do $b < 0$).

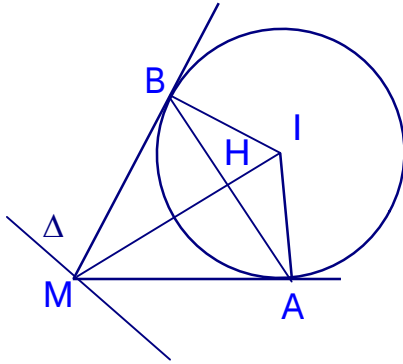
Suy ra: $B = (1; -1)$ và $C = (-2; -1)$, hoặc $B = (-2; -1)$ và $C = (1; -1)$.

Bài 19: cho (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, $\Delta: x - y + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên Δ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) sao cho

a) diện tích S của tứ giác $MAIB$ nhỏ nhất, I là tâm của (C).

b) độ dài AB nhỏ nhất.

♣ *Hướng dẫn:* $I(1; 2), R = 2$. Gọi H là trung điểm AB , ta có $AH \perp MI$.



$$M(t; t+7),$$

$$MI^2 = (t-1)^2 + (t+5)^2 = 2t^2 + 8t + 26.$$

$$MA^2 = MI^2 - R^2 = 2t^2 + 8t + 22.$$

$$a) S^2 = IA^2 \cdot MA^2 = MA^2 = 8(t^2 + 4t + 11).$$

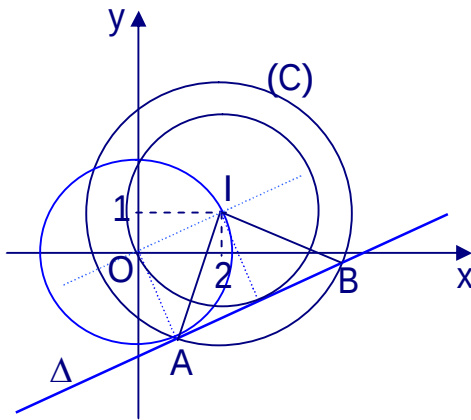
$$S \min \Leftrightarrow t = -2. \text{ Đáp số: } M(-2; 5).$$

$$b) AH = \frac{MA \cdot IA}{MI} = 2\sqrt{1 - \frac{4}{2t^2 + 8t + 26}}.$$

$$AB \min \Leftrightarrow t = -2. \text{ Đáp số: } M(-2; 5).$$

Bài 20: (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$, tâm I . Viết phương trình đường thẳng Δ cách O một khoảng bằng $\sqrt{5}$, cắt (C) tại A và B sao cho tam giác AIB có diện tích lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* (C) có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.



$$S \max \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} = d(O, \Delta).$$

Nếu Δ đi qua trung điểm OI thì:

$$\sqrt{5} = d(I, \Delta) \leq \frac{OI}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ vô lý.}$$

Nếu $\Delta \parallel OI$, suy ra $\Delta: x - 2y + c = 0$.

$$\text{Thỏa mãn: } d(O, \Delta) = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow c = \pm 5.$$

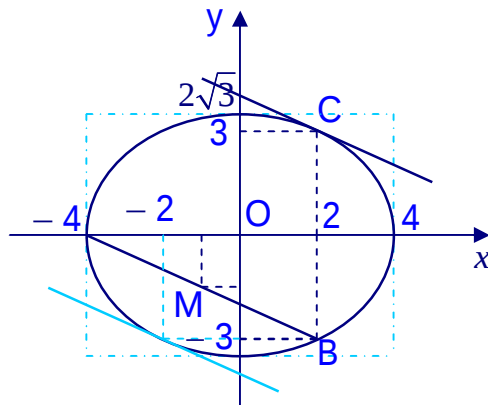
$$\text{Phương trình } \Delta: x - 2y \pm 5 = 0.$$

♣ *Ý nghĩa hình học:* Δ là tiếp tuyến chung của $C(O, \sqrt{5})$ và $C(I, \sqrt{5})$.

Bài 21: cho $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, $M\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$; A và B thuộc (E) và đối xứng với nhau qua M . Tìm tọa độ C nằm trên (E) sao cho ABC có diện tích S lớn nhất.

♣ *Hướng dẫn:* Giả sử $A(x; y)$, suy ra $B(-2-x; -3-y)$.

$A, B \in (E) \Leftrightarrow A(-4; 0)$ và $B(2; -3)$; $AB = 3\sqrt{5}$ - không đổi, suy ra:



$S \max \Leftrightarrow d(C, (AB)) \max.$

Phương trình $(AB): x + 2y + 4 = 0$.

Giả sử $C(x_0; y_0)$, suy ra:

$$d(C, (AB)) = \frac{1}{\sqrt{5}} |x_0 + 2y_0 + 4|.$$

$$d(C, (AB)) \max \Leftrightarrow |x_0 + 2y_0 + 4| \max$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0) \max \text{ và } x_0 + 2y_0 > 0.$$

$$(x_0 + 2y_0)^2 = \left(4 \cdot \frac{x_0}{4} + 4\sqrt{3} \cdot \frac{y_0}{2\sqrt{3}}\right)^2 \leq 64 \cdot \left(\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{12}\right) = 64. \text{ Suy ra: } x_0 + 2y_0 \leq 8.$$

Dấu "=" xảy ra, khi: $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{12} = 1$, $\frac{x_0}{16} = \frac{y_0}{24}$ và $x_0 + 2y_0 = 8$. Suy ra: $C(2; 3)$.

♣ *Áp dụng lượng giác:* $C \in (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, suy ra: $C(4\sin\alpha; 2\sqrt{3}\cos\alpha)$.

$$d(C, (AB)) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left| \sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha + 1 \right| = \frac{8}{\sqrt{5}} \left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right|.$$

$$d(C, (AB)) \max, \text{ khi: } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ hay } C(2; 3).$$

♣ *Ý nghĩa hình học – Nhận biết tọa độ C bằng phương pháp tiếp tuyến:*

C là một tiếp điểm của tiếp tuyến Δ của (E) và song song với AB .

$\Delta: x + 2y - c = 0$, suy ra $C(c - 2y; y)$, thỏa mãn: $16y^2 - 12cy + 3c^2 - 48 = 0$ (1).

Điều kiện tiếp xúc là phương trình (1) có nghiệm kép, hay: $c = \pm 8$

$$c = 8 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(2; 3) \Rightarrow \sqrt{5}d(C, (AB)) = 12.$$

$$c = -8 \Rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow C(-2; -3) \Rightarrow \sqrt{5}d(C, (AB)) = 4.$$

Chọn: $C(2; 3)$.

Phần 3. CÁC BÀI TẬP THAM KHẢO

Trong Phần 2, mỗi bài toán đều đã có định dạng cụ thể. Từ đó, muốn có thêm bài tập tương tự để luyện tập bạn đọc chỉ cần thay đổi số liệu hoặc bằng các giả thiết tương đương. Sau đây chỉ là một vài bài tập khác dạng, số thứ tự được đánh tiếp liên tục.

Bài 22: $A(3; 4)$, $B(1; 2)$ và $C(5; 0)$. TìmViết phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho $T = 2d(B, \Delta) + d(C, \Delta)$

3) lớn nhất.

4) nhỏ nhất.

Bài 23: cho đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , cắt các tia Ox và Oy tại A và B tương ứng, sao cho (C) nằm trong tam giác AOB đồng thời diện tích S của AOB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 24: cho (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm M và N tương ứng chuyển động trên tia Ox và tia Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (E) . Tìm MN sao cho độ dài MN nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 25: cho một điểm P , hai đường thẳng cắt nhau d_1 và d_2 . Đường thẳng Δ thay đổi qua P cắt hai cạnh của góc nhọn tạo bởi d_1, d_2 tương ứng tại A, B . Viết phương trình của Δ sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

===== Hết =====

KẾT LUẬN

Tài liệu này được là một phần được trích ra từ tài liệu tổng hợp của chính tác giả. Nó chỉ bao gồm một "Một số bài toán cực trị của hình học tọa độ trong mặt phẳng". Tác giả chân thành cảm ơn và mong nhận được ý kiến đóng góp của mọi người.

Thanh Hóa, ngày 12 tháng 5 năm 2014

TÁC GIẢ

Ngô Xuân Ái

Ý KIẾN NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ VÀ XẾP LOẠI

CỦA HỘI ĐỒNG KHOA HỌC CƠ SỞ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG